Capítulo 2
Cinemática

Sección 2.A — Problemas de selección

---

48. Una partícula tiene velocidad $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} + 4t\,\boldsymbol{j} - 5t^2\,\boldsymbol{k}$ donde t es el tiempo (todas las unidades están en el SI). Su aceleración a los 2 segundos es

A) $\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 10\boldsymbol{k}$

B) $4\boldsymbol{j} - 20\boldsymbol{k}$

C) $4\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{j} - 40\boldsymbol{k}$

D) $4\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j} - (40/3)\boldsymbol{k}$

E) $2\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j} - 20\boldsymbol{k}$

---

49. Una partícula tiene vector posición $\boldsymbol{r} = 4t^3\,\boldsymbol{i} - 5\,\boldsymbol{j} + 2t^4\,\boldsymbol{k}$ donde t es el tiempo (todas las unidades pertenecen al SI). Su velocidad al instante $t = 1$ s es

A) $\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + (2/5)\boldsymbol{k}$

B) $4\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

C) $12\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$

D) $4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$

E) $12\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{k}$

---

50. Una partícula tiene, en unidades del SI, una velocidad en función del tiempo dada por $\boldsymbol{v} = 3t^2\,\hat{\boldsymbol{u}}_x + 2\,\hat{\boldsymbol{u}}_y - 6t\,\hat{\boldsymbol{u}}_z$. ¿En qué instantes son perpendiculares su velocidad y su aceleración?

A) $t = 0$

B) Nunca

C) $t = \pm\sqrt{2}$

D) $t = \pm\sqrt{2}$ y $t = 0$

E) $t = \pm(2/3)^{1/3}$

---

51. La velocidad de una partícula es $\boldsymbol{v}(t) = 2\pi\cos(\pi t)\hat{\boldsymbol{x}} - 3\pi\,\mathrm{sen}(\pi t)\hat{\boldsymbol{y}} + 4\hat{\boldsymbol{z}}$ y su posición al instante $t = 1$ es $\boldsymbol{r}(1) = 2\hat{\boldsymbol{x}} + 3\hat{\boldsymbol{z}}$ (todas las unidades son del SI). La posición de la partícula en función del tiempo es

A) $\boldsymbol{r}(t) = 2[\mathrm{sen}(\pi t) + 1]\hat{\boldsymbol{x}} + 3[\cos(\pi t) - 1]\hat{\boldsymbol{y}} + (4t + 3)\hat{\boldsymbol{z}}$.

B) $\boldsymbol{r}(t) = [2\pi t\cos(\pi t) + 2]\hat{\boldsymbol{x}} - 3\pi t\,\mathrm{sen}(\pi t)\hat{\boldsymbol{y}} + (4t + 3)\hat{\boldsymbol{z}}$.

C) $\boldsymbol{r}(t) = [2\pi t\cos(\pi t) + 2 + 2\pi]\hat{\boldsymbol{x}} - 3\pi t\,\mathrm{sen}(\pi t)\hat{\boldsymbol{y}} + (4t - 1)\hat{\boldsymbol{z}}$.

D) $\boldsymbol{r}(t) = -2\pi^2\,\mathrm{sen}(\pi t)\hat{\boldsymbol{x}} - 3\pi^2\cos(\pi t)]\hat{\boldsymbol{y}}$.

E) $\boldsymbol{r}(t) = 2[\mathrm{sen}(\pi t) + 1]\hat{\boldsymbol{x}} + 3[\cos(\pi t) + 1]\hat{\boldsymbol{y}} + (4t - 1)\hat{\boldsymbol{z}}$.

---

52. Sea $\boldsymbol{v}$ la velocidad de una partícula, v su rapidez ($v^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$) y $\boldsymbol{a}$ su aceleración. Si la partícula se mueve con rapidez constante ($dv/dt = 0$) y $\boldsymbol{a} \neq 0$ entonces necesariamente

A) ninguna de las otras 4 opciones es correcta.

B) $\boldsymbol{a}$ es perpendicular a la trayectoria.

C) $|\boldsymbol{a}| = 0$.

D) $\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt} = 0$.

E) $\boldsymbol{a}$ es tangente a la trayectoria.

---

53. Una partícula con aceleración $\boldsymbol{a} = 3t\,\hat{\boldsymbol{u}}_x\,\mathrm{m/s^3}$ tiene en el instante inicial, $t = 0$, velocidad $\boldsymbol{v}_0 = 5\,\hat{\boldsymbol{u}}_z$ m/s y posición $\boldsymbol{r}_0 = 0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A) En todo instante su posición viene dada por $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}t^2/2 + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0$.

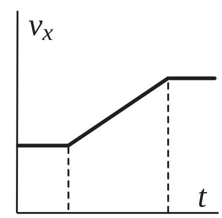
B) La trayectoria descrita por el objeto es una parábola.

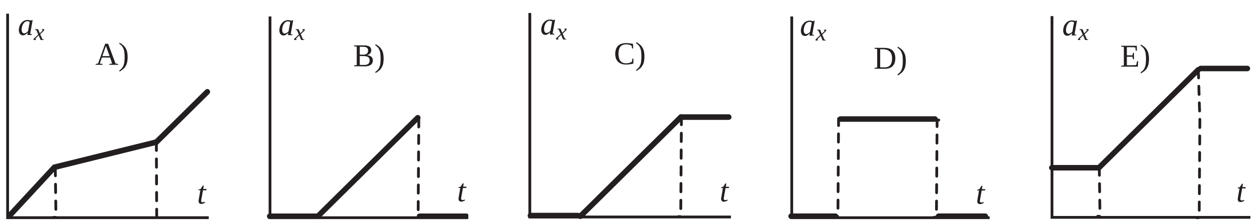
C) En todo instante su velocidad es $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{v}_0$.

D) Su movimiento transcurre en el plano xz.

E) Ninguna de las otras 4 opciones es correcta.

54. La gráfica de la derecha muestra, para una partícula, v_x en función del tiempo. ¿Cuál de los gráficos de abajo muestra mejor la función $a_x(t)$?





55. Una partícula parte del origen y se mueve sobre el eje x con una velocidad cuya componente v_x en función del tiempo se muestra en la gráfica (las unidades pertenecen al SI). El desplazamiento en metros de la partícula luego de los primeros 2 segundos es

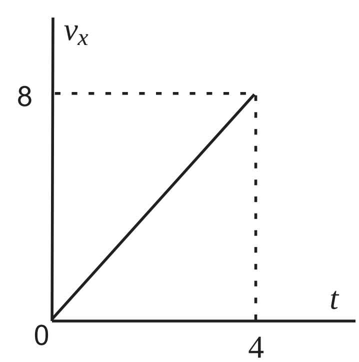
A) 4

B) 16

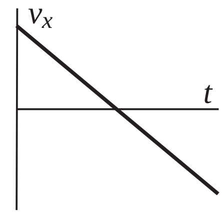
C) 1

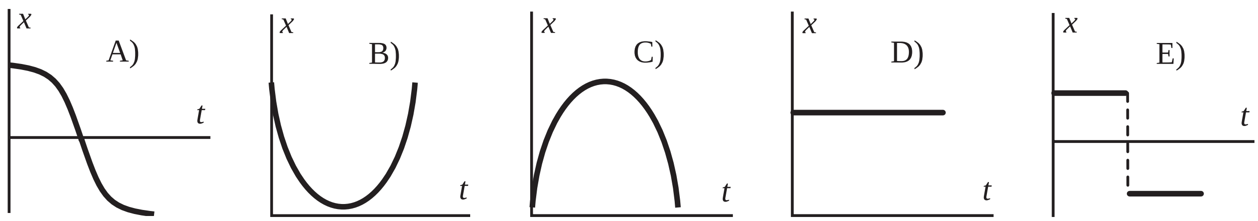
D) 8

E) ninguno de los anteriores



56. La gráfica de la derecha muestra, para una partícula, v_x en función del tiempo. ¿Cuál de los gráficos de abajo muestra mejor la función $x(t)$?





57. Una partícula parte del reposo y se mueve sobre el eje x con una aceleración cuya componente a_x en función del tiempo se muestra en la gráfica (en unidades del SI). La velocidad de la partícula, en metros/segundo, al instante $t = 2$ segundos es

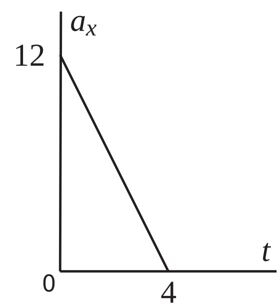
A) 12

B) -3

C) 6

D) 18

E) ninguna de las anteriores



58. Una partícula parte del origen y se mueve sobre el eje x con una velocidad cuya componente v_x en función del tiempo se muestra en la gráfica (unidades del SI). El desplazamiento en metros de la partícula luego de los primeros 5 segundos es

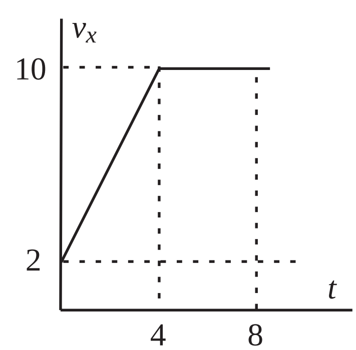
A) 24

B) 26

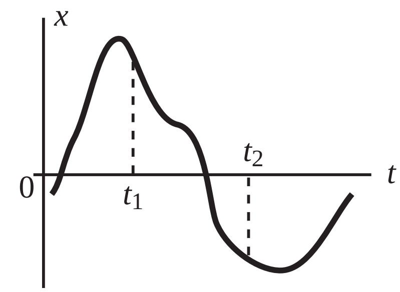
C) 34

D) 50

E) ninguno de los anteriores



59. La componente $x(t) = \boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{i}$ de la posición de una partícula se representa en la gráfica. En el lapso $[t_1, t_2]$ la componente $v_x = \boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{i}$ de su velocidad



A) toma valores tanto negativos como positivos.

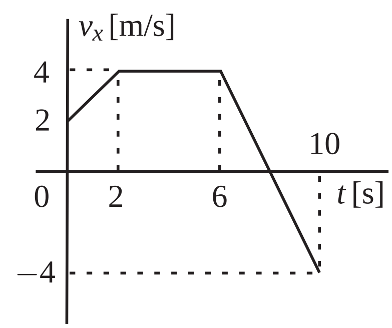
B) es negativa y no constante.

C) es positiva y no constante.

D) es negativa y constante.

E) es positiva y constante.

60. La gráfica representa la componente $v_x(t) = \boldsymbol{v}(t) \cdot \hat{\boldsymbol{u}}_x$ de la velocidad de una partícula. Al instante $t = 8$ s la componente $a_x = \boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}_x$ de la aceleración de la partícula en m/s^2 es



A) $+2$.

B) -1.

C) -2.

D) 0.

E) -4.

61. Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba. Cuando la piedra llega a su altura máxima, entonces su vector aceleración

A) no satisface ninguna de las otras 4 opciones.

B) es cero.

C) cambia de sentido.

D) apunta hacia arriba.

E) es el mismo que cuando está subiendo.

62. Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con rapidez inicial de 20 m/s. Luego de 3 s la velocidad de la piedra en m/s es (tome el eje y apuntando verticalmente hacia arriba)

A) $+10\hat{\boldsymbol{y}}$

B) $+30\hat{\boldsymbol{y}}$

C) $-10\hat{\boldsymbol{y}}$

D) $+50\hat{\boldsymbol{y}}$

E) $-30\hat{\boldsymbol{y}}$

---

63. La figura muestra dos pelotas bajo la influencia de la gravedad terrestre. La #1 cae y su aceleración es $\boldsymbol{a}_1$, la #2 está subiendo y su aceleración es $\boldsymbol{a}_2$. Se ha llamado $\boldsymbol{k}$ al vector unitario que apunta hacia arriba y g a la aceleración de gravedad. Se cumple que

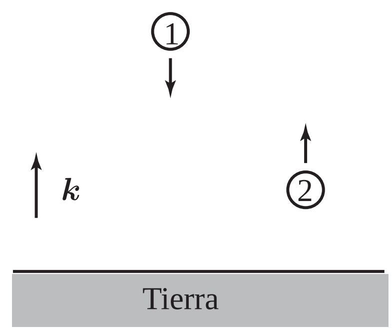
A) $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = -g\boldsymbol{k}$.

B) $\boldsymbol{a}_1 = g\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{a}_2 = -g\boldsymbol{k}$.

C) $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = g\boldsymbol{k}$.

D) $\boldsymbol{a}_1 = -g\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{a}_2 = +g\boldsymbol{k}$.

E) ninguna de las otras 4 opciones es cierta.



---

64. Un joven nada durante un tiempo $t_1 = 60$ seg a favor de la corriente de un río y luego regresa al punto de partida nadando a contracorriente durante un tiempo t_2. Si la rapidez de la corriente respecto a la orilla es de 30 cm/seg y el joven siempre nada con una rapidez de 50 cm/seg respecto al agua, se cumple que:

A) $t_2 = 96$ seg

B) $t_2 = 100$ seg

C) $t_2 = 60$ seg

D) $t_2 = 15$ seg

E) $t_2 = 240$ seg

---

65. Diga cuál de las siguientes afirmaciones, referidas a una partícula, es correcta.

A) En un movimiento unidimensional las direcciones de sus vectores aceleración y velocidad no pueden ser opuestas.

B) Puede tener velocidad nula en un instante aún cuando esté acelerada.

C) Si su aceleración es cero, la partícula no puede estar moviéndose.

D) Si su velocidad es cero en un cierto instante, su aceleración es cero en ese instante.

E) Su velocidad no puede aumentar si su aceleración está disminuyendo.

---

66. En el movimiento de partículas con aceleración constante

A) la rapidez siempre es proporcional al módulo de la aceleración.

B) la trayectoria siempre es rectilínea.

C) la velocidad nunca se anula.

D) el movimiento ocurre en un plano.

E) la aceleración es tangente a la trayectoria.

---

67. Diga cuál de las siguientes afirmaciones referidas al movimiento de partículas es correcta.

A) La velocidad no siempre es tangente a la trayectoria.

B) Ninguna de las otras 4 opciones es correcta.

C) Si el vector aceleración es constante entonces necesariamente la trayectoria es rectilínea.

D) Si en un instante dado la aceleración es nula entonces en ese instante la partícula está en reposo.

E) Si en un instante dado la velocidad es nula entonces en ese instante la aceleración es nula también.

---

68. Desde lo alto de un edificio se lanza una piedra con una dirección inicial de 45° por encima de la horizontal. Si nada entorpece el movimiento de la piedra, cuando ésta alcanza su máxima altura se cumple que

A) ninguna de las otras 4 opciones es correcta.

B) su rapidez es nula.

C) el tiempo transcurrido desde el lanzamiento es la mitad del tiempo de vuelo.

D) los vectores velocidad y aceleración son perpendiculares.

E) su aceleración es cero.

69. La figura muestra la trayectoria de una pelota de golf sobre un campo inclinado un ángulo α respecto a la horizontal. El eje z es perpendicular al campo. La aceleración de la pelota mientras está en el aire es

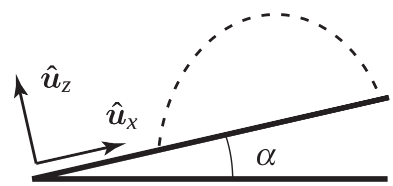
A) $-g\cos(\alpha)\,\hat{\boldsymbol{u}}_z$

B) $-g\,[\operatorname{sen}(\alpha)\,\hat{\boldsymbol{u}}_x + \cos(\alpha)\,\hat{\boldsymbol{u}}_z]$

C) $-g\,\hat{\boldsymbol{u}}_z$

D) $-g\,[\cos(\alpha)\,\hat{\boldsymbol{u}}_x + \operatorname{sen}(\alpha)\,\hat{\boldsymbol{u}}_z]$

E) $g\,[\operatorname{sen}(\alpha)\,\hat{\boldsymbol{u}}_x - \cos(\alpha)\,\hat{\boldsymbol{u}}_z]$



70. La figura muestra la trayectoria de una pelota de golf sobre un campo inclinado un ángulo de 30° respecto a la horizontal. El eje z es perpendicular al campo. Al ser golpeada la pelota sale con una velocidad de $(6\,\hat{\boldsymbol{u}}_x + 5\sqrt{3}\,\hat{\boldsymbol{u}}_z)$ m/s. El tiempo, en segundos, que tarda en caer de nuevo al campo es

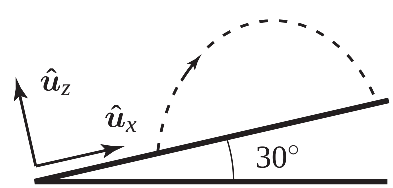
A) 2

B) $12/(5\sqrt{3})$

C) $12/5$

D) $\sqrt{3}$

E) $6/5$



71. Una joven, en reposo respecto a Tierra, observa que un tren se mueve horizontalmente con aceleración constante. Dentro del tren un niño lanza una pelota verticalmente hacia arriba respecto a sí mismo. La trayectoria de la pelota vista por la joven es

A) necesariamente una línea recta vertical.

B) necesariamente una línea recta horizontal.

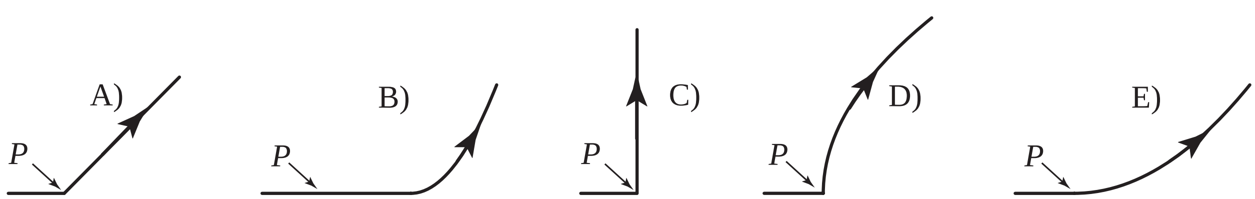
C) necesariamente una parábola.

D) necesariamente una línea recta ni horizontal ni vertical.

E) ninguna de las otras 4 opciones.

---

72. Un barco se deja llevar por un río a velocidad constante hacia el Este respecto a un aldeano en la orilla. En cierto punto *P* de su trayectoria el barco enciende los motores que le proporcionan una aceleración constante hacia el Norte respecto al aldeano. Tome el Este hacia la derecha de esta hoja y el Norte hacia la parte superior de la misma y diga cuál de las siguientes curvas representa mejor la trayectoria del barco vista por el aldeano.



---

73. Un joven, en reposo respecto a Tierra, observa que un ciclista se aleja de él en línea recta, horizontal y con rapidez de 20 km/h. El ciclista lanza una pelota (sin que ésta rote) y el joven la observa moverse en línea recta perpendicular al piso. Diga cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera.

A) Desde su propio sistema de referencia el ciclista lanzó la pelota verticalmente.

B) La distancia horizontal entre la pelota y el joven aumenta a 20 km/h.

C) En el punto más alto de su trayectoria la pelota se aleja del ciclista a 20 km/h.

D) La trayectoria de la pelota vista por el ciclista no es una parábola.

E) La trayectoria del ciclista vista por la pelota no es una parábola.

74. Se escoge el plano xy de forma tal que un río recto tiene aguas que fluyen con velocidad $5\,\boldsymbol{i}$ m/s según un aldeano en la orilla. Un pescador, que cruza el río, observa que la velocidad de las aguas es $(4\,\boldsymbol{i}-3\,\boldsymbol{j})$ m/s . La velocidad, en m/s, del aldeano según el pescador es

A) $9\,\boldsymbol{i}-3\,\boldsymbol{j}$

B) $+\boldsymbol{i}+3\,\boldsymbol{j}$

C) $-5\,\boldsymbol{i}$

D) $-9\,\boldsymbol{i}+3\,\boldsymbol{j}$

E) $-\boldsymbol{i}-3\,\boldsymbol{j}$

---

75. A las 12 del día las agujas que indican la hora y los minutos de un reloj pulsera coinciden. La próxima vez que coincidan, la hora t, cumplirá con

A) $1:05\,\text{pm} \leq t < 1:06\,\text{pm}$.

B) $1:03\,\text{pm} \leq t < 1:05\,\text{pm}$.

C) $t = 12$ de la noche.

D) $1:06\,\text{pm} \leq t < 1:07\,\text{pm}$.

E) $1:07\,\text{pm} \leq t \leq 1:09\,\text{pm}$.

---

76. Diga cuál de las siguientes afirmaciones, referidas al movimiento circular de una partícula, es correcta.

A) Para un movimiento circular en ningún instante los vectores velocidad y aceleración pueden ser paralelos.

B) En un movimiento circular uniforme el vector velocidad permanece constante.

C) La aceleración radial tiene módulo v^2/R , sólo si la rapidez es constante.

D) Una partícula puede tener movimiento circular sin estar acelerada.

E) Si una partícula se mueve en un círculo su vector aceleración es siempre paralelo a la línea radial.

---

77. Una partícula describe un círculo de radio 16 m en el plano *xz*. En cierto instante su velocidad es paralela al eje x y su aceleración es $(4\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{k})$ m/s^2. Su rapidez en ese instante, en m/s, es

A) 8

B) 12

C) 3/4

D) $4\sqrt{97}$

E) distinta de las indicadas en las opciones anteriores.

---

78. Una partícula describe un círculo en el plano *xy* con centro en el origen. En cierto instante su velocidad es $6\,\boldsymbol{i}$ m/s y su aceleración $(3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})$ m/s^2. ¿Cuáles son las coordenadas (x, y) de la partícula en ese instante?

A) $(+9, 0)$

B) $(+12, 0)$

C) $(0, -9)$

D) $(0, +9)$

E) $(0, -12)$

---

79. La trayectoria de una partícula es una circunferencia de radio 6 m. Ella parte del reposo al instante $t = 0$ y aumenta su rapidez constantemente a razón de 8 m/s^2. Luego de (3/4) s la magnitud de su aceleración, en m/s^2, es

A) 12

B) 14

C) 6

D) 10

E) 8

Sección 2.B — Problemas de desarrollo

---

80. El vector de posición de una partícula de masa m es

$$\boldsymbol{r}(t) = [R\,\mathrm{sen}(wt) - A]\boldsymbol{i} + [B - R\cos(wt)]\boldsymbol{j}$$

donde A, B, w y R son constantes positivas y t es el tiempo.

a. Halle los vectores velocidad y aceleración de la partícula. Encuentre también la rapidez de la misma.

b. Encuentre y describa la trayectoria de la partícula.

c. Haga un dibujo de la trayectoria e indique sobre la misma la posición de la partícula y la dirección de su velocidad para el instante $t = 0$. Suponga que $R < A$ y $R < B$.

---

81. Desde un cierto sistema de referencia cartesiano se observa que la velocidad de una partícula en función del tiempo es $\boldsymbol{v}(t) = 3t^2\hat{\boldsymbol{u}}_x - 4t\hat{\boldsymbol{u}}_y$, siendo su posición al instante $t = 1$ $\boldsymbol{r}(1) = \hat{\boldsymbol{u}}_x + \hat{\boldsymbol{u}}_y + 4\hat{\boldsymbol{u}}_z$. Las unidades de todas las cantidades pertenecen al sistema Internacional de unidades (SI).

a. Halle los vectores posición y aceleración de la partícula.

b. Encuentre para el instante $t = 3$ la posición, velocidad, aceleración y rapidez de la partícula.

c. Para el intervalo $t \in [0,3]$ encuentre los vectores: desplazamiento, velocidad media y aceleración media.

d. ¿Para qué instantes se cumple que los vectores posición y aceleración son perpendiculares entre sí?

---

82. La trayectoria de cierta partícula está dada por la ecuación $y = -3x^3 + 4x^2 + x + 1$.

a. Halle para qué valores de x el vector velocidad de la partícula es paralelo al eje x.

b. Halle para qué valores de x son iguales las componentes x y y del vector velocidad.

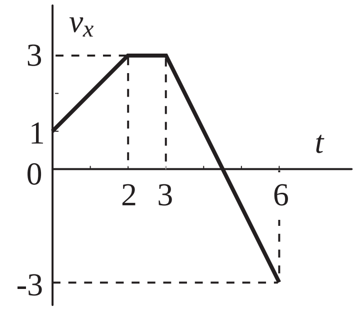
---

83. La figura muestra la componente x de la velocidad, $v_x(t)$, para una partícula que se mueve sobre el eje x. Suponga que en $t = 0$ la partícula se encuentra en $x = 2$. Todas las unidades pertenecen al sistema Internacional de unidades (SI).

a. Halle la función $v_x(t)$ en el intervalo $t \in [0,6]$.

b. Encuentre la componente x de la aceleración, $a_x(t)$, y la coordenada $x(t)$ en el intervalo $t \in [0,6]$.

c. Grafique las funciones $a_x(t)$ y $x(t)$.



84. Dos partículas se mueven sobre el eje x con aceleración constante. En el instante $t = 0$ la partícula A se encuentra en $x = -3$ y la partícula B en $x = 9$. La gráfica muestra las velocidades de las partículas en función del tiempo. Todas las unidades pertenecen al SI.

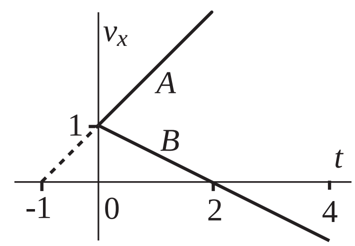
a. Halle las funciones $a_x(t)$, $v_x(t)$ y $x(t)$ para ambas partículas, tome $t \geq 0$.

b. Encuentre en qué momento ($t = t_{\text{ch}}$) y lugar ($x = x_{\text{ch}}$) las partículas chocan.

c. En un gráfico dibuje la posición de ambas partículas en función del tiempo, desde $t = 0$ hasta $t = t_{\text{ch}}$.

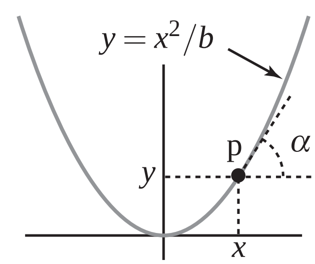
d. Describa cualitativamente el movimiento de cada partícula.

e. Halle la distancia recorrida por la partícula B y su desplazamiento desde el inicio hasta el momento del encuentro.



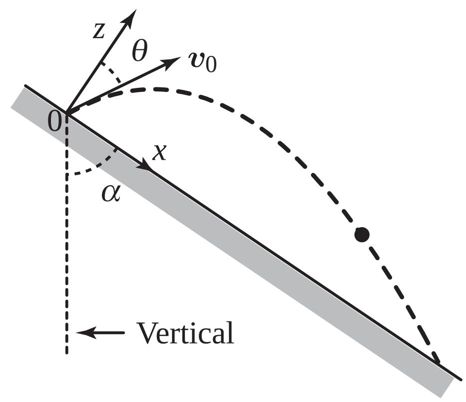
85. La figura muestra una cuenta p que desliza por un alambre plano en forma de parábola. La ecuación de la parábola es $y = x^2/b$, donde b es una constante positiva con dimensiones de longitud. Llamaremos α al ángulo entre la tangente a la curva y el eje x, en el punto donde se encuentra la cuenta.

a. Halle $\text{tg}(\alpha)$ en función de la coordenada x de p.



b. Suponga que la cuenta tiene rapidez v y se mueve hacia la derecha. Halle las componentes x y y de la velocidad de la cuenta en función de v y de la coordenada x de p. Ayuda: recuerde que el vector velocidad es tangente a la trayectoria.

86. La figura muestra una colina inclinada un ángulo α respecto a la vertical y la trayectoria de un proyectil. El proyectil se lanza desde el origen 0 con una velocidad inicial $\boldsymbol{v}_0$ de módulo v_0 y que forma un ángulo θ con el eje z (perpendicular al plano). El eje x se toma tangente al plano apuntando hacia abajo.



a. Tome el sistema de referencia indicado en la figura y halle las componentes de los vectores aceleración, velocidad y posición del proyectil en función del tiempo.

b. Halle la máxima separación entre el proyectil y la colina.

c. Halle la distancia entre el origen y el punto de caída del proyectil sobre la colina. Demuestre que esa distancia es máxima si $\theta = \alpha/2$.

---

87. Al instante $t = 0$ una piedra (la # 1) se deja caer desde la azotea de un edificio de altura h. Al mismo tiempo y desde la calle se lanza hacia arriba una segunda piedra. Las piedras chocan a una altura $h/4$ respecto a la calle.

a. Determine el instante en el cual chocan las partículas y la rapidez inicial de la partícula #2.

b. Encuentre la velocidad de las partículas en el instante del choque (observe sus direcciones).

c. Muestre en un gráfico las posiciones de las partículas en función del tiempo. Represente en un dibujo las trayectorias de las partículas.

---

88. Un ascensor parte del reposo y desciende con aceleración constante de 1 m/s^2 respecto a Tierra. Dos segundos después de iniciarse el descenso se cae la lámpara del techo del ascensor. La distancia del techo al piso del ascensor es de 2 m. Definimos el referencial del ascensor como aquél con origen en su techo y dirección y positiva apuntando hacia abajo.

a. Halle los vectores aceleración, velocidad y posición de la lámpara respecto al ascensor.

b. Determine el tiempo que tarda la lámpara en caer.

c. Encuentre la distancia recorrida por el ascensor mientras cae la lámpara.

---

89. Los instrumentos de un aeroplano en vuelo horizontal indican que se dirige hacia el Este con una rapidez de 300 km/h respecto al aire. En Tierra se observa que el aeroplano se encuentra en medio de una corriente de aire que sopla hacia el Norte con rapidez de 60 km/h. Halle la velocidad y rapidez del avión respecto a Tierra.

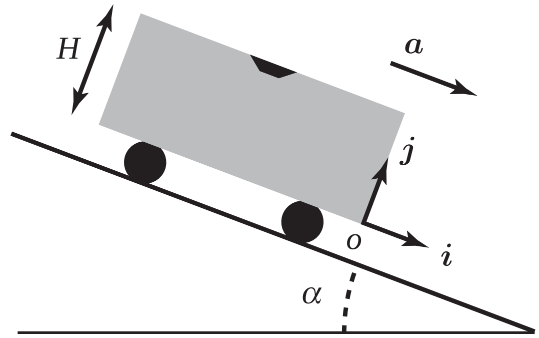
---

90. Un hombre guía su automóvil bajo lluvia a una velocidad constante respecto a Tierra de módulo v y dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$. Mientras conduce el hombre observa que la trayectoria de cada gota es una línea recta que se aparta un ángulo α de la vertical y al detenerse observa que la lluvia cae verticalmente y prácticamente con velocidad constante. Halle el vector velocidad de las gotas de lluvia respecto al auto en movimiento y respecto a Tierra (tome $\hat{\boldsymbol{y}}$ vertical hacia arriba).

---

91. Un vagón de ferrocarril motorizado va cuesta abajo sobre un plano inclinado un ángulo α. La distancia entre el techo y el piso del vagón es H y su aceleración respecto a Tierra es constante y vale $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{i}$, ver figura. Un pasajero del vagón observa que una lámpara, situada en el centro del techo del vagón, se desprende y choca con el piso en el punto o (en el extremo inferior del vagón).

a. Halle la aceleración de la lámpara respecto a Tierra y respecto al pasajero del vagón. Exprese sus resultados en términos de los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$.



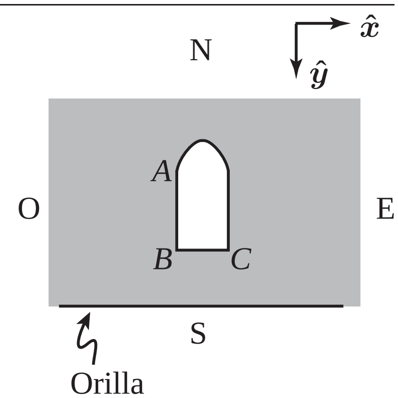
b. Escriba las componentes cartesianas de la velocidad y posición de la lámpara según el pasajero. Tome el origen en el punto o solidario al vagón y llame L a la longitud del vagón.

c. Halle el tiempo que tarda la lámpara en caer y la longitud L del vagón.

d. Determine la ecuación de la trayectoria de la lámpara, $y = y(x)$, según el pasajero. ¿Qué clase de curva es la trayectoria de la lámpara vista por el pasajero y vista desde Tierra?

---

92. La corriente de un río fluye de Este a Oeste con rapidez constante $v_c = 2$ m/s respecto a Tierra. Un bote atraviesa el río y de acuerdo a sus instrumentos de a bordo se mueve respecto al río dirigiéndose al Norte con rapidez constante $v_b = 10$ m/s. Respecto al bote un pasajero se desplaza sobre la cubierta en línea recta desde el punto A hasta el punto C con una rapidez constante $v_p = 10$ m/s. Suponga que $\overline{BA} = 4$ m y apunta hacia el Norte y $\overline{BC} = 3$ m y apunta hacia el Este.

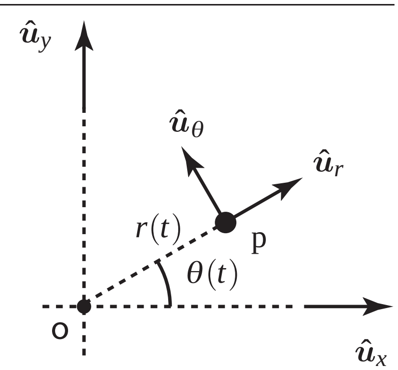


a. Halle el vector unitario $\hat{\boldsymbol{u}}$ que apunta de A a C y las velocidades del bote y del pasajero respecto a Tierra.

b. Halle el tiempo que tarda el pasajero en ir de A hasta C. ¿ Qué distancia recorre el bote en ese tiempo según un observador en Tierra ?

---

93. La figura muestra las coordenadas polares (r, θ) y los vectores polares $(\hat{\boldsymbol{u}}_r, \hat{\boldsymbol{u}}_\theta)$ para un punto p que se mueve en el plano. La distancia de p al origen es r y el ángulo entre su vector posición y el eje x es θ. Nótese que el vector $\hat{\boldsymbol{u}}_\theta$ es perpendicular al vector $\hat{\boldsymbol{u}}_r$ y apunta en la dirección en que θ aumenta.



a. Escriba los vectores unitarios $(\hat{\boldsymbol{u}}_r, \hat{\boldsymbol{u}}_\theta)$ en función de los vectores unitarios $(\hat{\boldsymbol{u}}_x, \hat{\boldsymbol{u}}_y)$ y del ángulo θ.

b. Tome como observador uno fijo respecto a los ejes cartesianos. Derive respecto al tiempo las expresiones obtenidas en la parte **a** y demuestre que se cumple

$$\dot{\hat{\boldsymbol{u}}}_r = \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{u}}_\theta \quad \text{y} \quad \dot{\hat{\boldsymbol{u}}}_\theta = -\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{u}}_r\,.$$

c. Utilizando los resultados de la pregunta anterior derive el vector posición del punto p, $\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{u}}_r$, y halle sus vectores velocidad y aceleración en coordenadas polares, esto es, debe hallarlos en función de las cantidades r, θ, sus derivadas y de los vectores polares.

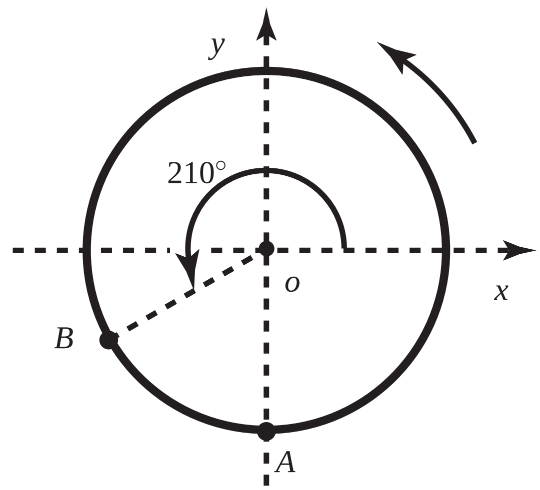
d. Aplique el resultado anterior al caso de un movimiento circular ($r = R$ constante) y determine las componentes polares de la velocidad y la aceleración. Defina la rapidez angular $w = |\dot{\theta}|$ y escriba en términos de R y w la rapidez de p y la componente radial (centrípeta) de su aceleración. Realice un dibujo mostrando el punto p y los vectores polares.

---

94. Una partícula se desplaza sobre un riel circular, con centro en el origen de coordenadas y situado en un plano horizontal, ver figura. El móvil parte del punto A, tiene rapidez constante, su movimiento es en sentido antihorario y al cabo de 6 segundos se halla por primera vez en el punto de coordenadas cartesianas $(-4,0)$ m.

a. Halle el radio de la circunferencia, la velocidad angular w y el ángulo $\theta(t)$ que existe entre el vector posición de la partícula y el semieje x positivo para cualquier instante t.

b. Exprese en la base cartesiana los vectores velocidad $\boldsymbol{v}$ y aceleración $\boldsymbol{a}$ de la partícula cuando se encuentra en el punto B. Calcule qué longitud de riel le falta recorrer para regresar al punto A.



---

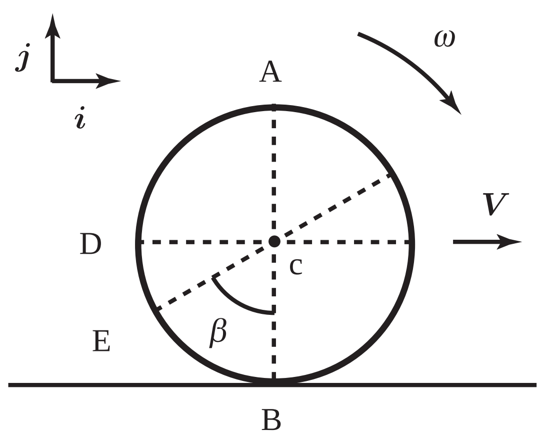
95. El aro de la figura tiene radio R y rueda sobre una superficie horizontal fija a Tierra. El aro gira en sentido horario mientras su centro c se mueve hacia la derecha con rapidez V respecto a la superficie. Considere un observador con origen en c (se traslada con el aro) y que no rota respecto a Tierra. Suponga que todos los puntos del aro tienen rapidez V respecto al observador (se dice entonces que el aro rueda sin deslizar).

En la figura se han marcado 4 puntos para un cierto instante. El punto A es el punto más alto del aro, el B el más bajo, el D el punto del extremo izquierdo y el E con un radio vector que forma un ángulo β con la vertical.

a. Halle la velocidad angular ω del aro.

b. Halle los vectores velocidad de los puntos A, B y D respecto a la superficie.

c. Halle el vector velocidad del punto E respecto a la superficie y diga para qué ángulo β su módulo es igual a V.



96. Una partícula describe una circunferencia moviéndose en sentido antihorario con una rapidez $v = 3t^2 + 4t$, donde $t \geq 0$ es el tiempo y todas las unidades son del Sistema Internacional.

a. Halle la longitud de arco recorrida por la partícula en el lapso $[0, t]$.

b. Suponga que al instante $t = 2$ s la aceleración de la partícula tiene módulo 20 m/s^2. Calcule el radio de la circunferencia.

Sección 7.C — Cinemática (Selección)

	50 A	53 D	56 C	59 B	62 C
48 B	51 E	54 D	57 D	60 C	63 A
49 E	52 B	55 A	58 C	61 E	64 E

65 B	68 D	71 C	74 E	77 B	
66 D	69 B	72 E	75 A	78 C	
67 B	70 A	73 C	76 A	79 D	

Sección 7.D — Cinemática (Desarrollo)

80.

a.

$$\boldsymbol{v} = Rw\,[\cos(wt)\boldsymbol{i} + \mathrm{sen}(wt)\boldsymbol{j}]\,, \quad \boldsymbol{a}(t) = Rw^2\,[-\mathrm{sen}(wt)\boldsymbol{i} + \cos(wt)\boldsymbol{j}]\,, \quad |\boldsymbol{v}| = Rw$$

b. Tenemos que

$$x = [R\,\mathrm{sen}(wt) - A] \quad \text{y} \quad y = [B - R\cos(wt)]\,.$$

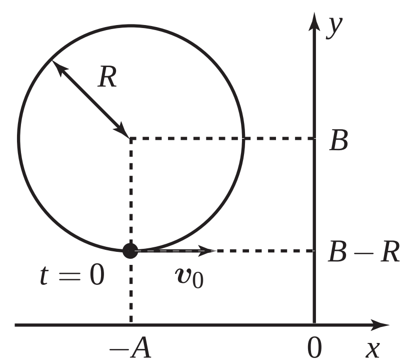
Luego la ecuación de la trayectoria es

$$(x+A)^2 + (y-B)^2 = R^2\,.$$

Se trata de una circunferencia de radio R con centro en el punto $(-A, B)$.

c.

$$\boldsymbol{r}(0) = [-A\,\boldsymbol{i} + (B-R)\,\boldsymbol{j}] \ \text{ y } \ \boldsymbol{v}_0 \equiv \boldsymbol{v}(0) = Rw\,\boldsymbol{i}\,.$$



81.

a.

$$\boldsymbol{r}(t) = t^3\hat{\boldsymbol{u}}_x + (-2t^2+3)\hat{\boldsymbol{u}}_y + 4\hat{\boldsymbol{u}}_z\,, \quad \boldsymbol{a}(t) = 6t\,\hat{\boldsymbol{u}}_x - 4\hat{\boldsymbol{u}}_y$$

b.

$$\boldsymbol{r}(3) = 27\hat{\boldsymbol{u}}_x - 15\hat{\boldsymbol{u}}_y + 4\hat{\boldsymbol{u}}_z\,, \quad \boldsymbol{v}(3) = 27\hat{\boldsymbol{u}}_x - 12\hat{\boldsymbol{u}}_y$$
$$\boldsymbol{a}(3) = 18\hat{\boldsymbol{u}}_x - 4\hat{\boldsymbol{u}}_y\,, \quad v(3) = 3\sqrt{97}$$

c.

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{r}(3) - \boldsymbol{r}(0) = 27\hat{\boldsymbol{u}}_x - 18\hat{\boldsymbol{u}}_y\,, \quad \boldsymbol{v}_{\text{media}} = \frac{1}{3}\boldsymbol{D} = 9\hat{\boldsymbol{u}}_x - 6\hat{\boldsymbol{u}}_y$$
$$\boldsymbol{a}_{\text{media}} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{v}(3) - \boldsymbol{v}(0)) = 9\hat{\boldsymbol{u}}_x - 4\hat{\boldsymbol{u}}_y$$

d.

$$t = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{22}-2}{3}}$$

82.
a.

$$x_1 = 1\,, \quad x_2 = -1/9$$

b.

$$x_1' = 0\,, \quad x_2' = \ 8/9$$

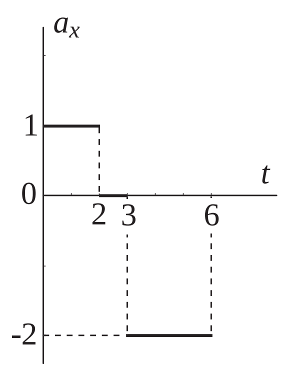
83.
a.

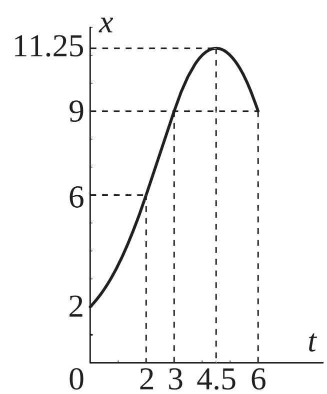
$$v_x(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si } t \in [0,2] \\ 3 & \text{si } t \in [2,3] \\ -2t+9 & \text{si } t \in [3,6] \end{cases}$$

b.

$$a_x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (0,2) \\ 0 & \text{si } t \in (2,3) \\ -2 & \text{si } t \in (3,6) \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2}+t+2 & \text{si } t \in [0,2] \\ 3t & \text{si } t \in [2,3] \\ -t^2+9t-9 & \text{si } t \in [3,6] \end{cases}$$

c.





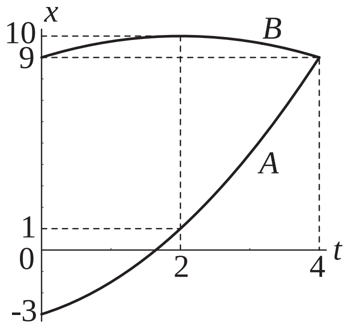
84.
a.

Partícula A:	$a_x = 1$	$v_x = t+1$	$x = \dfrac{t^2}{2}+t-3$
Partícula B:	$a_x = -\dfrac{1}{2}$	$v_x = -\dfrac{t}{2}+1$	$x = -\dfrac{t^2}{4}+t+9$

b.

$$t_{\text{ch}} = 4\,, \quad x_{\text{ch}} = 9$$

c.



d. La partícula A parte de $x = -3$ y se mueve en dirección del eje x positivo acelerando (con aceleración constante) hasta el lugar del choque. La partícula B parte de $x = 9$ y se mueve inicialmente en dirección $\boldsymbol{i}$ desacelerando hasta $x = 10$ ($t = 2$) donde se detiene, luego regresa acelerando hasta el punto del choque en $x = 9$.

e. La distancia recorrida por B es 2 y su desplazamiento es nulo.

85.

a.

$$\mathrm{tg}(\alpha) = 2x/b\,.$$

b.

$$v_x = \frac{bv}{\sqrt{b^2+4x^2}}\,, \quad v_y = \frac{2xv}{\sqrt{b^2+4x^2}}\,.$$

86.

a.

$$\ddot{x} = \ g\cos(\alpha)\,, \qquad \dot{x} = \ g\cos(\alpha)t + v_0\mathrm{sen}(\theta)\,, \qquad x = \ \frac{g}{2}\cos(\alpha)t^2 + v_0\mathrm{sen}(\theta)t\,,$$

$$\ddot{z} = -g\mathrm{sen}(\alpha)\,, \qquad \dot{z} = -g\mathrm{sen}(\alpha)t + v_0\cos(\theta)\,, \qquad z = -\frac{g}{2}\mathrm{sen}(\alpha)t^2 + v_0\cos(\theta)t\,,$$

b. La máxima separación ocurre para $\dot{z} = 0$ y vale

$$z = \frac{v_0^2\cos^2(\theta)}{2g\,\mathrm{sen}(\alpha)}\,.$$

c. El punto de caída ocurre para $z = 0$ y la distancia vale

$$x(\theta) = \frac{v_0^2}{g\,\mathrm{sen}(\alpha)}\left[\frac{1+\cos(2\theta)}{\mathrm{tg}(\alpha)} + \mathrm{sen}(2\theta)\right]\,.$$

La distancia máxima ocurre para $dx(\theta)/d\theta = 0$.

---

87. Tomaremos el origen en la base del edificio y el eje y positivo hacia arriba.

a.

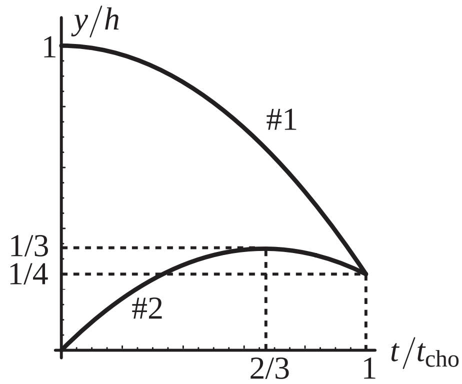
$$t_{\mathrm{cho}} = \sqrt{\frac{3h}{2g}}\,, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2gh}{3}}\,.$$

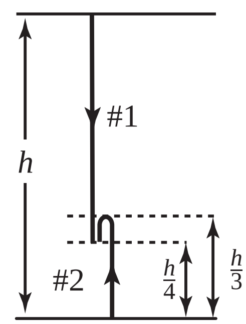
b.

$$\boldsymbol{v}_1 = -\sqrt{\frac{3hg}{2}}\,\boldsymbol{j}\,, \quad \boldsymbol{v}_2 = -\sqrt{\frac{hg}{6}}\,\boldsymbol{j}\,.$$

c. La figura siguiente a la izquierda muestra las alturas de las partículas (en unidades de h) en función del tiempo (en unidades de t_{cho}). La figura siguiente a la derecha muestra las trayectorias;

aunque todo el movimiento ocurre en la misma recta vertical se dibujan las trayectorias sobre distintas verticales para apreciar mejor el movimiento.





---

88. Las unidades (no indicadas) pertenecen al Sistema Internacional. L indica lámpara, A ascensor y T Tierra.

a. Tomaremos como $t = 0$ el instante para el cual se desprende la lámpara.

$$\boldsymbol{a}_{L,A} = \boldsymbol{a}_{L,T} - \boldsymbol{a}_{A,T} = 9\,\hat{\boldsymbol{u}}_y\,, \quad \boldsymbol{v}_{L,A} = 9t\,\hat{\boldsymbol{u}}_y\,, \quad \boldsymbol{r}_{L,A} = \frac{9}{2}t^2\,\hat{\boldsymbol{u}}_y\,.$$

b.

$$y_{L,A} = \frac{9}{2}t^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{3}\,.$$

c.

$$D = \frac{14}{9}\,.$$

---

89. Llamaremos $\hat{\boldsymbol{E}}$ y $\hat{\boldsymbol{N}}$ a los vectores unitarios en dirección Este y Norte respectivamente.

$$\boldsymbol{v} = (300\,\hat{\boldsymbol{E}} + 60\,\hat{\boldsymbol{N}})\,\mathrm{km/h}\,, \qquad v = 60\sqrt{26}\,\mathrm{km/h}\,.$$

90.

$$\boldsymbol{v}_{\text{gota,Tierra}} = -\frac{v}{\mathrm{tg}(\alpha)}\,\hat{\boldsymbol{y}}\,, \qquad \boldsymbol{v}_{\text{gota,Auto}} = -\frac{v}{\mathrm{tg}(\alpha)}\,\hat{\boldsymbol{y}} - v\,\hat{\boldsymbol{x}}\,.$$

---

91. Los subíndices L, P y T hacen referencia a la lámpara, al pasajero y al referencial inercial de Tierra respectivamente.

a.

$$\boldsymbol{a}_{L,T} = g\,[\mathrm{sen}(\alpha)\boldsymbol{i} - \cos(\alpha)\boldsymbol{j}]\,, \quad \boldsymbol{a}_{L,P} = [g\,\mathrm{sen}(\alpha) - a]\boldsymbol{i} - g\cos(\alpha)\boldsymbol{j}\,.$$

b.

$$v_x = [g\,\mathrm{sen}(\alpha) - a]t\,, \qquad v_y = -g\cos(\alpha)t$$

$$x = [g\,\mathrm{sen}(\alpha) - a]\frac{t^2}{2} - \frac{L}{2}\,, \qquad y = -g\cos(\alpha)\frac{t^2}{2} + H$$

c.

$$t=\sqrt{\frac{2H}{g\cos(\alpha)}}\,,\qquad L=\frac{2H\,[g\,\mathrm{sen}(\alpha)-a]}{g\cos(\alpha)}\,.$$

d. Vista por el pasajero la trayectoria es una línea recta de ecuación

$$y=-\frac{g\cos(\alpha)}{g\,\mathrm{sen}(\alpha)-a}\,x\,.$$

Vista desde Tierra la trayectoria es una parábola.

---

92. Las letras b, p y T designarán respectivamente el bote, pasajero y Tierra.

a.

$$\hat{\boldsymbol{u}}=\frac{3\,\hat{\boldsymbol{x}}+4\,\hat{\boldsymbol{y}}}{5}\,,\quad \boldsymbol{v}_{b,T}=(-2\,\hat{\boldsymbol{x}}-10\,\hat{\boldsymbol{y}})\,\mathrm{m/s}\,,\quad \boldsymbol{v}_{p,T}=(4\,\hat{\boldsymbol{x}}-2\,\hat{\boldsymbol{y}})\,\mathrm{m/s}\,.$$

b.

$$t=\frac{1}{2}\,\mathrm{s}\,,\quad d=\sqrt{26}\,\mathrm{m}\,.$$

93.

a.

$$\hat{\boldsymbol{u}}_r=\cos[\theta(t)]\hat{\boldsymbol{u}}_x+\mathrm{sen}[\theta(t)]\hat{\boldsymbol{u}}_y\,,\quad \hat{\boldsymbol{u}}_\theta=-\mathrm{sen}[\theta(t)]\hat{\boldsymbol{u}}_x+\cos[\theta(t)]\hat{\boldsymbol{u}}_y\,.$$

b.

$$\dot{\hat{\boldsymbol{u}}}_r=\dot\theta[-\mathrm{sen}(\theta)\hat{\boldsymbol{u}}_x+\cos(\theta)\hat{\boldsymbol{u}}_y]=\dot\theta\,\hat{\boldsymbol{u}}_\theta\,,$$
$$\dot{\hat{\boldsymbol{u}}}_\theta=\dot\theta[-\cos(\theta)\hat{\boldsymbol{u}}_x-\mathrm{sen}(\theta)\hat{\boldsymbol{u}}_y]=-\dot\theta\,\hat{\boldsymbol{u}}_r\,.$$

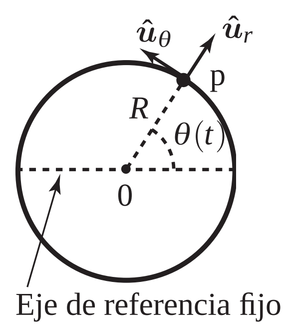
c.

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\dot r\hat{\boldsymbol{u}}_r+r\dot\theta\hat{\boldsymbol{u}}_\theta\,,\quad \boldsymbol{a}=\ddot{\boldsymbol{r}}=(\ddot r-r\dot\theta^2)\hat{\boldsymbol{u}}_r+(2\dot r\dot\theta+r\ddot\theta)\hat{\boldsymbol{u}}_\theta\,.$$

d.

$$\boldsymbol{v}=R\dot\theta\hat{\boldsymbol{u}}_\theta\,,\qquad \boldsymbol{a}=-R\dot\theta^2\hat{\boldsymbol{u}}_r+R\ddot\theta\hat{\boldsymbol{u}}_\theta\,,$$

$$v=Rw\qquad |\boldsymbol{a}_{\mathrm{radial}}|=Rw^2=\frac{v^2}{R}$$



94.

a.

$$R=4\,\mathrm{m}\,,\quad w=\frac{\pi}{4}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\,,\quad \theta(t)=\frac{\pi t}{4}-\frac{\pi}{2}\ \ (\text{con } t \text{ en segundos y } \theta \text{ en radianes})\,.$$

b.

$$\boldsymbol{v}_B=\frac{\pi}{2}(\hat{\boldsymbol{u}}_x-\sqrt{3}\,\hat{\boldsymbol{u}}_y)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,,\quad \boldsymbol{a}_B=\frac{\pi^2}{8}(\sqrt{3}\,\hat{\boldsymbol{u}}_x+\hat{\boldsymbol{u}}_y)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,,\quad l=\frac{4\pi}{3}\,\mathrm{m}\,.$$

95.
a. La rapidez de cualquier punto del aro respecto a c es $V = R\omega$, luego $\omega = V/R$.

b.
$$\boldsymbol{V}_A = 2V\boldsymbol{i}\,, \quad \boldsymbol{V}_B = 0\,, \quad \boldsymbol{V}_D = V\boldsymbol{i} + V\boldsymbol{j}\,.$$

c.
$$\boldsymbol{V}_E = V(1-\cos(\beta))\boldsymbol{i} + V\mathrm{sen}(\beta)\boldsymbol{j}\,, \qquad |\boldsymbol{V}_E| = V \quad \Rightarrow \quad \beta = \pm 60^\circ\,.$$

96. Las unidades (no indicadas) pertenecen al Sistema Internacional.

a.
$$l = t^3 + 2t^2\,.$$

b.
$$R = 100/3\,.$$